

## Capítulo 3

### Los Dieléctricos y los Campos

3.1.	<u><i>Introducción</i></u>	3-2
3.2.	<u><i>Descripción microscópica de los materiales dieléctricos</i></u>	3-7
3.3.	<u><i>Ecuaciones electrostáticas en presencia de dieléctricos</i></u>	3-14
3.4.	<u><i>Condiciones de frontera o de contorno o de borde</i></u>	3-15
3.5.	<u><i>Buscando la normal adecuada...</i></u>	3-19
3.6.	<u><i>Aplicaciones</i></u>	3-20
3.6.1.	<u><i>Esfera dieléctrica uniformemente cargada en volumen</i></u>	3-20
3.6.2.	<u><i>Conductor cargado-dieléctrico descargado-vacío</i></u>	3-23
3.6.3.	<u><i>Conductor cargado –dieléctrico descargado-dieléctrico descargado-vacío</i></u>	3-25
3.7	<i>Sistemas con más de un capacitor</i>	3-27
	<u><i>Apéndice: el dipolo puntual</i></u>	3-30

### 3.1 Introducción

Hasta ahora estuvimos viendo cómo influyen los campos eléctricos en los materiales en los conductores. En ellos, las cargas se mueven de forma tal que responden a los campos

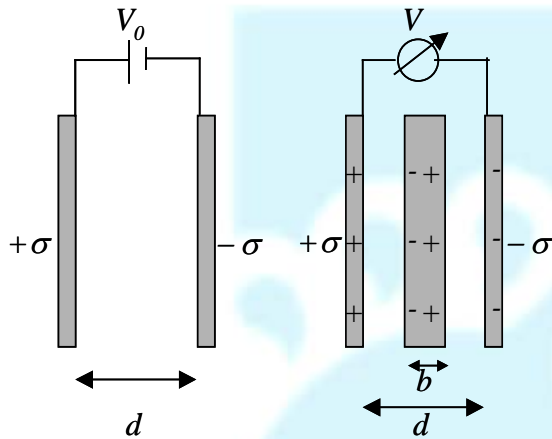


Fig.1.a) Capacitor con vacío entre placas, b) con un bloque conductor

eléctricos haciendo que sean nulos en su interior en condiciones electrostáticas. Supongamos un capacitor de placas plano-paralelas (de dimensiones tales que se puedan despreciar los efectos de borde) conectado a una batería  $V_0$ . Las placas se cargarán con una densidad superficial  $\sigma$  de forma tal que

$$V_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{Qd}{\epsilon_0 A} \quad (1)$$

siendo  $A$  el área de la placa del capacitor. La

$$\text{capacidad es: } C_0 = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (2)$$

¿Qué ocurre si colocamos un bloque conductor descargado entre las placas de este capacitor si previamente retiramos la batería? Como el campo eléctrico debe ser nulo dentro de los conductores en situación electrostática, los electrones libres del conductor se desplazarán como indica la Figura 1. De esta manera el campo eléctrico tendrá un valor  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$  en las zonas

de vacío y cero en los conductores. ¿Cuál será la nueva diferencia de potencial entre las placas? ¿Cuál es la capacidad de este dispositivo? Como el campo eléctrico es nulo en el interior del bloque de espesor  $b$ , la nueva diferencia de potencial es la circulación del campo eléctrico en la zona donde NO es nulo:

$$\Delta V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (d - b), \quad (3)$$

es decir, el nuevo voltaje es menor que el original. La capacidad resulta

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{Q}{A\epsilon_0} (d - b)} = \frac{A\epsilon_0}{(d - b)} = \frac{A\epsilon_0}{d(1 - \frac{b}{d})} > C_0 \quad (4)$$

En consecuencia, la capacidad  $C$  es mayor que la que tenía antes de colocarle el bloque conductor. Es interesante observar que esta capacidad es independiente del lugar donde se coloque el conductor. Si el conductor es de espesor despreciable frente a la separación entre

placas, resulta  $C \approx C_0$ , es decir, la capacidad no se ve seriamente afectada por una lámina conductora muy delgada colocada paralelamente a las placas.

Ahora discutiremos qué ocurre cuando **materiales que no conducen** la electricidad se colocan en campos eléctricos. Les recomendamos un video del MIT (que reproduce una experiencia de Laboratorio) para que observen qué ocurre cuando se separan las placas de un capacitor plano-paralelo (entre ellas hay aire, que es un aislante eléctrico) y cuando se introduce otro dieléctrico (Plexiglass) <https://www.youtube.com/watch?v=e0n6xLdwaT0>.

Faraday descubrió que los materiales aisladores eran afectados por los campos eléctricos a pesar de que no podía haber conducción. Faraday se basó en el siguiente hecho experimental:

- 1) Cargaba un capacitor vacío estableciendo una  $V_0$  entre las placas
- 2) Retiraba la batería y colocaba un aislante entre las placas (en todo el espacio entre placas).
- 3) Medía el nuevo voltaje entre placas, el que siempre resultó menor que  $V_0$ .

Como la carga sobre cada placa no había variado y  $C = \frac{Q}{\Delta V}$ , este resultado mostraba que la capacidad aumentaba. Cuánto aumentaba dependía del material. Así estableció la relación entre la capacidad en vacío  $C_0$  y la capacidad con material aislante  $C$ :  $C = \kappa C_0$  denominando a  $\kappa$  como la constante dieléctrica relativa al vacío<sup>1</sup>. Esta constante dependía del material exclusivamente.

Así, en un capacitor de placas plano-paralelas resulta

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad , \quad \text{siendo } V = \frac{Q}{C} = \frac{1}{\kappa} \frac{Q}{C_0} \quad (5)$$

Al observar la expresión para la capacidad, pareciera que se puede disminuir  $d$  todo lo que se desee pudiendo almacenar toda la carga que se quiera. Así, consideramos un capacitor conectado a una pila  $V_0$  y cambiamos la separación entre las placas como indica la Figura 2. Como la capacidad varió (por cambiar la distancia entre placas) y la diferencia de potencial no varió porque siempre estuvo conectado a la pila, tiene que haber variado la carga sobre cada placa. Es decir:

---

<sup>1</sup> Una notación más habitual y cómoda es asignarle el símbolo  $\epsilon_r$  a la constante dieléctrica relativa al vacío  $\kappa$

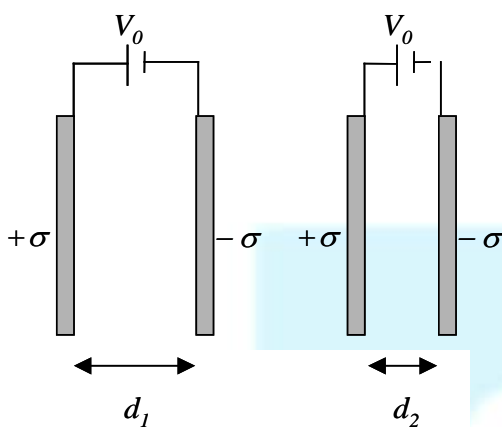


Fig.2. Capacitor con placa plano paralela a  $V_0$  constante

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= C_1 V_0 = \kappa \epsilon_0 V \frac{A}{d_1} \\ Q_2 &= C_2 V_0 = \kappa \epsilon_0 V \frac{A}{d_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow Q_2 > Q_1 \text{ si } d_1 > d_2 \quad (6)$$

Sin embargo, existe un límite inferior para  $d$  (dado un valor de  $V_0$ ) que depende del material. Conforme  $d$  disminuye, el campo eléctrico aumenta hasta que, alcanzado un valor  $E_{\text{máximo}}$ , se produce lo que se llama **ruptura dieléctrica**, el dieléctrico pierde sus propiedades de aislante y se vuelve conductor. La siguiente tabla muestra el campo máximo admisible

en alguno dieléctricos.

Medio	$\kappa$	$E_{\text{máximo}}$ (V/m)
Aire	1,00059	$3 \times 10^6$
Teflón	2,1	$60 \times 10^6$
Mylar	3,2	$7 \times 10^6$
Plexiglass	3,4	$40 \times 10^6$
Papel	3,7	$16 \times 10^6$
Vidrio Pyrex	5,6	$14 \times 10^6$

Vemos, entonces, que agregar un material dieléctrico tiene algunas ventajas (además de brindar soporte mecánico): aumenta la capacidad y permite resistir mayores tensiones.

### Tema especial 1. Aumentar la capacidad ¿significa acumular más energía?

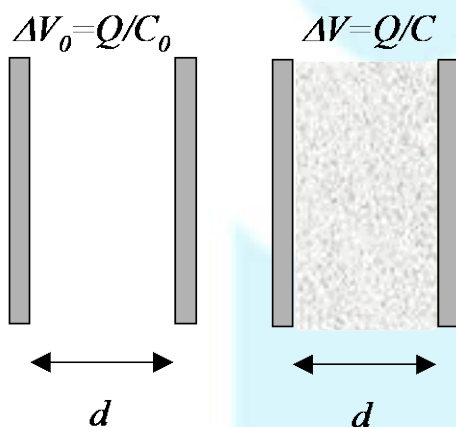


Fig.3.a) Capacitor vacío con carga  $Q$ ,  
b) a  $Q$  constante, con dieléctrico

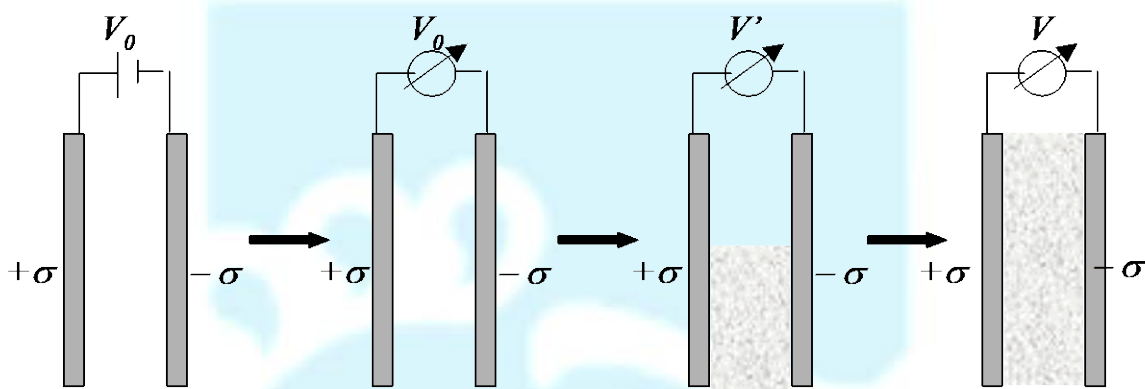
Veamos primero **un capacitor sin y con dieléctrico con la misma carga  $Q$** . La energía acumulada en el capacitor vacío es

$$U_0 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_0} \quad (7)$$

mientras que cuando todo el espacio entre placas está lleno de dieléctrico resulta

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (8)$$

De esta manera  $\frac{U_0}{U} = \frac{C}{C_0} > 1$ . Es decir, la energía que almacena en vacío es mayor que la que almacena con un dieléctrico ¿Cómo se entiende esto? Si la carga  $Q$  se mantuvo constante, los pasos seguidos fueron:



**Fig.4.** a) Capacitor a  $Q$  constante (cargado a través de una batería con  $V_0$ ) .b) Se mide la diferencia de potencial. c) Se va introduciendo un dieléctrico y se miden diferencias de potencial (que dependen de cuánto se introdujo el material) d) Capacitor con dieléctrico y carga  $Q$  cuando el dieléctrico ha sido introducido en su totalidad

Si disminuyó la energía potencial electrostática, el campo debe haber realizado un trabajo  $W$  tal que

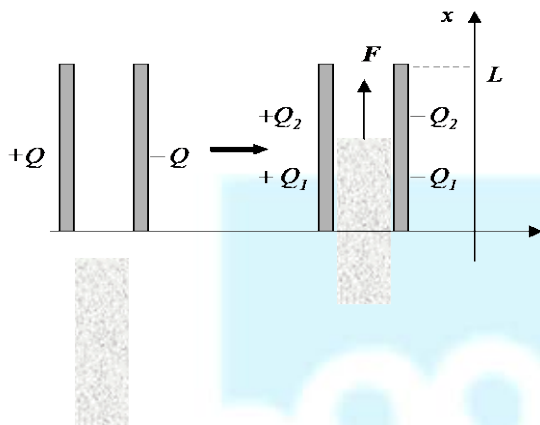
$$W_{\text{realizado por el campo}} = -\Delta U > 0 \quad (9)$$

Experimentalmente se encuentra que el dieléctrico es atraído, es decir, actúa una fuerza sobre él que “lo tira hacia adentro”. El análisis detallado es bastante complicado; las líneas de campo no son rectas cerca del límite del dieléctrico, aunque hayamos considerado al capacitor como “infinito”. Justamente la deformación de las líneas de campo es la que permite describir cualitativamente la fuerza. Pero para determinar su valor se pueden hacer consideraciones energéticas exclusivamente.

Es de esperar que la energía potencial  $U$  vaya disminuyendo a medida que se introduce el dieléctrico, es decir, que dependa de  $x$  únicamente. Como  $\Delta U$  en un capacitor está dado por

$$U = \Delta U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 \quad (10)$$

independientemente de la forma del capacitor, la fuerza sobre el dieléctrico estará dada por



**Fig.5.** Energía de un capacitor de capacidad variable

$$\vec{F} = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x \quad (11)$$

ya que no puede haber dependencia en las otras coordenadas por tratarse de “planos infinitos”.

Analicemos el problema:

1) la carga total se mantiene constante en cada placa porque no hay contacto eléctrico entre ellas es decir,  $Q = Q_1 + Q_2$  en todo momento

2) Cada conductor es una equipotencial, por lo tanto, en todo instante

$$V = \frac{Q_1(x)}{C_1(x)} = \frac{Q_2(x)}{C_2(x)} \quad (12)$$

Si despreciamos los efectos de borde, las placas del capacitor son de área  $D \times L$ , y el dieléctrico fue introducido una distancia  $x$ , tendremos

$$C_1 = \kappa C_0 = \kappa \epsilon_0 \frac{Dx}{d} \quad C_2 = \epsilon_0 \frac{D(L-x)}{d} \quad (13)$$

Este sistema será equivalente a un capacitor con capacidad  $C$ , diferencia de potencial entre placa  $V$  y carga  $Q = Q_1 + Q_2$ , es decir,

$$Q = VC = Q_1 + Q_2 = VC_1 + VC_2 = V(C_1 + C_2) \quad (14)$$

De (13) y (14) se obtiene

$$C = \frac{\epsilon_0 D}{d} (\kappa x + L - x) \quad (15)$$

Como de (14) resulta

$$Q_1 = C_1 \frac{Q}{C} \quad Q_2 = C_2 \frac{Q}{C} \quad (16)$$

se tiene

$$Q_1 = Q \frac{\kappa x}{\kappa x + L - x} \quad Q_2 = Q \frac{L - x}{\kappa x + L - x} \quad (17)$$

es decir las densidades superficiales de carga resultan distintas en la zona donde hay o no hay dieléctrico.

$$\sigma_1 = \frac{Q}{D} \frac{\kappa}{\kappa x + L - x} \quad \sigma_2 = \frac{Q}{D} \frac{1}{\kappa x + L - x} \quad (18)$$

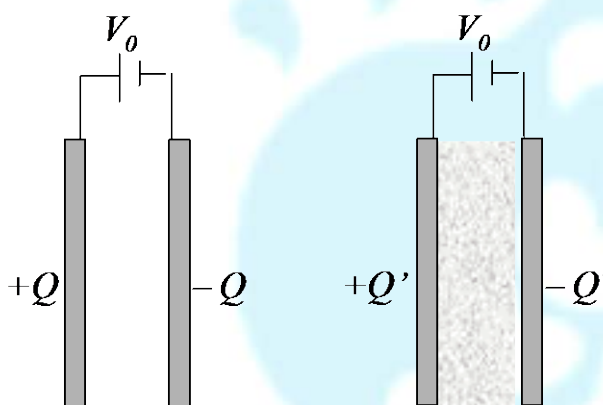
Resulta así que  $\sigma_1 > \sigma_2$ . Analizaremos después este resultado.

De (10), (11) y (15) resulta (se puede realizar a  $V=\text{cte}$  o a  $Q=\text{cte}$ )

$$\vec{F} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{\epsilon_0 D}{d} (\kappa - 1) \vec{e}_x = \frac{1}{2} V^2 \frac{\epsilon_0 D}{d} (\kappa - 1) \vec{e}_x \quad (19)$$

Es decir que resulta una fuerza de atracción sobre el dieléctrico (como ocurre experimentalmente)

Veamos ahora **un capacitor sin y con dieléctrico mantenido a potencial constante**  $V_0$  (Figura 6). La energía potencial acumulada en el capacitor sin dieléctrico será



**Fig.6.** Capacitor a  $V_0$  constante (a) con dieléctrico (b) sin dieléctrico

$$U_0 = \frac{1}{2} V^2_0 C_0 \quad (20)$$

y con dieléctrico de permitividad relativa  $\kappa$

$$U = \frac{1}{2} V^2_0 C = \kappa \frac{1}{2} V^2_0 C_0 \quad (21)$$

Es decir, resulta  $U > U_0$ . La energía potencial electrostática del sistema aumentó. Esto se debe a que se hizo trabajo sobre el sistema. ¿Quién hizo ese trabajo? La batería, ya que es una fuente

adicional de energía.

¿Y qué pasó con la carga en las placas conductoras? De (8), (20) y (21)

$$\frac{U}{U_0} = \kappa = \frac{\frac{1}{2} \frac{Q'^2}{C}}{\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_0}} = \frac{Q'^2}{Q^2} \frac{C_0}{C} = \frac{Q'^2}{Q^2} \frac{1}{\kappa} \quad (22)$$

De esta expresión es fácil deducir que

$$Q' = \kappa Q \quad (23)$$

O sea que aumentó la carga sobre la placa conductora al introducir el dieléctrico. Este resultado será también analizado más adelante.

**Fin tema especial 1.**

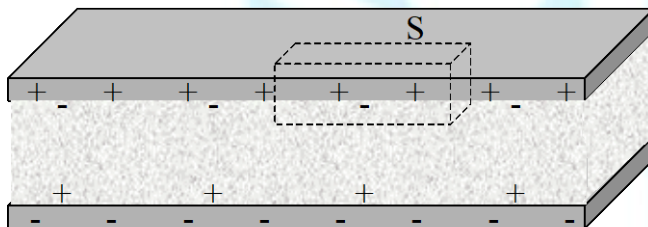
### 3.2 Descripción microscópica de los materiales dieléctricos

Cuando Faraday “descubrió” el comportamiento de los materiales dieléctricos al colocarlos entre las placas de un capacitor, no se conocía el modelo atómico como una agrupación de electrones y protones (el electrón se descubrió en 1897). La teoría atómica en ese entonces provenía de la Química (modelo de Dalton) donde cada átomo era una esfera maciza indivisible.

El resultado experimental de Faraday era que la diferencia de potencial entre las placas disminuía al introducir el dieléctrico entre placas cargadas y aisladas entre sí, con lo que la capacidad debía aumentar (por su definición). Pero si el voltaje (diferencia de potencial) era menor, como

$$\Delta V = - \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (24)$$

el campo eléctrico tenía que haber disminuido, aunque la carga sobre las placas no había cambiado. ¿Cómo se explica este comportamiento? Sabemos de la Ley de Gauss que el flujo del campo eléctrico está directamente relacionado con la carga encerrada. Como el campo se reduce, la carga encerrada en el volumen  $\iiint$  debe ser menor!! La Figura 1 nos da la pista para hacer un modelo: el campo es menor pero no nulo; la única posibilidad es que en la superficie



**Fig.7.** Carga inducida en un dieléctrico

externa al conductor haya cargas de signo opuesto como se muestra en la Fig.7. es decir, el fenómeno se puede explicar considerando que se induce una cierta cantidad de carga en la superficie intersección entre el conductor y el dieléctrico. Se dice que existe una **carga**

**inducida o carga de polarización**, cuya densidad superficial está notada como  $\sigma_{pol}$ .

En el capacitor de placas plano-paralelas aislado (es decir se mantiene la carga constante con densidad superficial  $\sigma_{Lib}$ ) de área  $A$  y separación entre placas  $d$ , habrá una diferencia de potencial entre las placas dada por

$$\Delta V_{vacio} = E_{vacio} d \quad (25)$$

$$\Delta V_{diel} = E_{diel} d \quad (26a)$$

$$E_{diel} = \frac{\sigma_{total}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_{Lib} + \sigma_{Pol}}{\epsilon_0} \quad (26b)$$



De (5), (25) y (26)

$$\frac{\Delta V_{diel}}{\Delta V_{vacio}} = \frac{E_{diel}}{E_{vacio}} = \frac{1}{\kappa} = \frac{\sigma_{Lib} + \sigma_{pol}}{\sigma_{Lib}} \quad (27)$$

de lo que se deduce que la densidad superficial de carga de polarización está dada por

$$\sigma_{Lib} \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) = -\sigma_{Pol} \quad (28)$$

Como  $\kappa > 1$ , la **densidad de carga superficial de polarización**  $\sigma_{pol}$  resulta de distinto signo y menor en módulo que la densidad de carga en el conductor (que llamaremos de ahora en más **densidad superficial de carga libre**  $\sigma_{Lib}$ ).

Pero... ¿cómo se genera esa distribución de carga de polarización? Un modelo atómico o molecular que considerara que hay cargas positivas y negativas resulta muy adecuado. ¿Por qué? Pensemos en moléculas en las cuales el centro de cargas negativas no coincide con el de positivas (ese tipo de molécula se llama **polar**). Como modelo más sencillo, sería un **dipolo**.

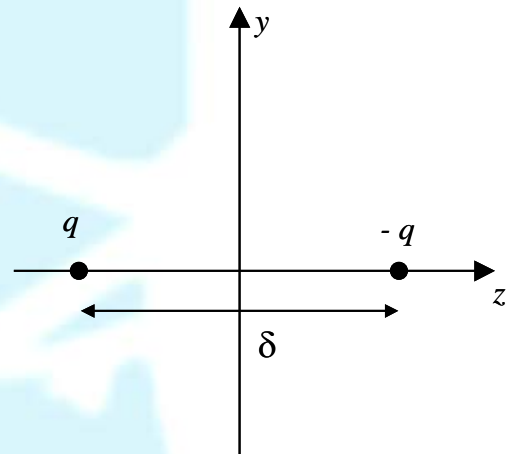


Fig.8. Esquema de un dipolo

## Tema especial 2. El campo eléctrico generado por un dipolo (para más detalles, ver APÉNDICE).

Habíamos calculado la expresión del campo eléctrico en todo el espacio:

$$E_x(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q x \left\{ \frac{1}{\left[ x^2 + y^2 + \left( z + \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[ x^2 + y^2 + \left( z - \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} \right\} \quad (29)$$

$$E_y(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q y \left\{ \frac{1}{\left[ x^2 + y^2 + \left( z + \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[ x^2 + y^2 + \left( z - \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} \right\} \quad (30)$$

$$E_z(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left\{ \frac{\left( z + \frac{\delta}{2} \right)}{\left[ x^2 + y^2 + \left( z + \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} - \frac{\left( z - \frac{\delta}{2} \right)}{\left[ x^2 + y^2 + \left( z - \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} \right\} \quad (31)$$

Como existe simetría de revolución alrededor del eje  $z$ , estudiaremos el campo en el plano  $yz$  es decir, en  $x = 0$ . Resulta, entonces

$$E_x(0, y, z) = 0 \quad (32)$$

$$E_y(0, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q y \left\{ \frac{1}{\left[ y^2 + \left( z + \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[ y^2 + \left( z - \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} \right\} \quad (33)$$

$$E_z(0, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left\{ \frac{\left( z + \frac{\delta}{2} \right)}{\left[ y^2 + \left( z + \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} - \frac{\left( z - \frac{\delta}{2} \right)}{\left[ y^2 + \left( z - \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} \right\} \quad (34)$$

y a lo largo del eje  $y$  (es decir, en  $z = 0$ ) el campo eléctrico solamente tiene componente  $z$  ya que

$$E_x(0, y, 0) = 0 \quad (35)$$

$$E_y(0, y, 0) = 0 \quad (36)$$

$$E_z(0, y, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\delta}{\left[ y^2 + \left( \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} \quad (37)$$

De (37) es fácil deducir que para puntos del espacio a lo largo de la mediatriz y alejados del dipolo ( $y \gg \delta$ ) el campo disminuye como  $1/y^3$ . Por la simetría de revolución el mismo resultado corresponde a cualquier punto alejado del dipolo sobre el plano  $xy$ . Analicemos ahora cuál es la dependencia del campo con la distancia al dipolo cuando se considera un punto sobre el eje  $z$  (es decir,  $x=y=0$ )

$$E_z(0, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left\{ \frac{\left( z + \frac{\delta}{2} \right)}{\left[ y^2 + \left( z + \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} - \frac{\left( z - \frac{\delta}{2} \right)}{\left[ y^2 + \left( z - \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} \right\} \quad (38)$$

Como para  $z \gg \delta$

$$\frac{1}{\left( z \pm \frac{\delta}{2} \right)^2} = \frac{1}{z^2 \left( 1 \pm \frac{\delta}{2z} \right)^2} = \frac{1}{z^2} \left( 1 \mp \frac{\delta}{z} \right) \quad (39)$$

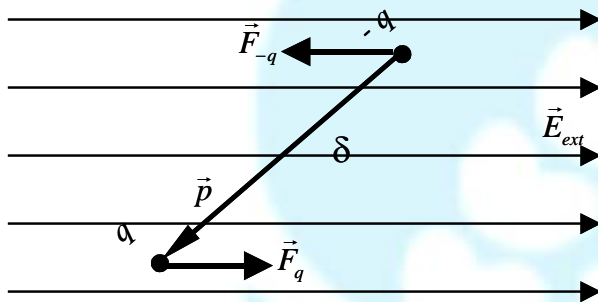
el campo eléctrico resulta

$$E_z(0,0,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q\delta \frac{2}{z^3} \quad (40)$$

Es decir, el campo eléctrico lejos del dipolo varía como  $1/r^3$  y depende del producto  $q\delta$ . A este producto se lo denomina **momento dipolar**.

### Fin tema especial 2

Definimos, porque será útil, un vector llamado momento dipolar  $\vec{p} = q\vec{\delta}$  (41), donde el vector  $\vec{\delta}$  tiene su origen en la carga negativa y su fin en la positiva.



**Fig.9.** Torque sobre un dipolo

¿Qué ocurre cuando un dipolo rígido es puesto bajo la acción de un campo eléctrico uniforme?

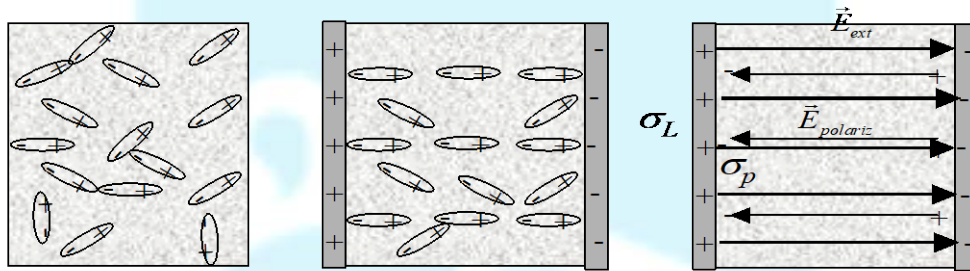
La fuerza total sobre el dipolo es nula (el centro de masa no acelera). En consecuencia, el torque  $\vec{\tau}$  será independiente del punto desde el cual se lo calcule. Tomamos, entonces, como centro de momentos a la carga negativa.

$$\vec{\tau}_{-q} = \vec{r}_q \times \vec{F}_q = \delta \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \times q\vec{E}_{ext} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (42)$$

De lo cual se deduce que el dipolo tiende a orientarse de forma tal que la dirección y sentido del momento dipolar  $\vec{p}$  sea la del campo  $\vec{E}_{ext}$ .

Volvamos, entonces, al modelo atómico de cargas positivas y negativas. Si los materiales dieléctricos fueran “dipolos” (se dice que tienen un **momento dipolar permanente**), al colocarlos en un campo eléctrico externo (como el producido por un capacitor) los dipolos se orientarían paralelos al campo eléctrico externo. Entonces un modelo de este tipo podría explicar el comportamiento de los capacitores con material dieléctrico. Cuando un material es colocado entre las placas de un capacitor, los “dipolos” pasan de tener una distribución al azar a una orientación paralela al campo. El grado de paralelismo dependerá del dieléctrico, de la temperatura y de la magnitud del campo.

Pero sabemos que hay materiales *no polares*, es decir, materiales donde el centro de cargas positivas coincide con el de negativas. Podemos pensar que el campo eléctrico externo separa el centro de las cargas positivas del de las negativas; éste es un *momento dipolar inducido*. Estos momentos también tienden a alinearse con el campo eléctrico externo. Como conclusión: tanto para moléculas polares como no polares tendremos *momentos dipolares (permanente o inducido)* y los materiales quedan “polarizados” en un campo externo.



**Fig.10.** a)Dieléctrico desordenado, b)Ordenado en un campo, c)Esquema macroscópico del campo.

Parece razonable pensar que el momento dipolar inducido depende del valor del campo eléctrico externo. Es decir, un campo intenso desplazará al centro de cargas positivas y negativas más que uno leve. Supongamos que en un átomo o molécula hay cargas  $q$  y  $-q$ , cuyos centros están separados una distancia  $\delta$ . El momento dipolar de cada molécula será, entonces,  $q\delta$ . Si hay en promedio  $N$  moléculas por unidad de volumen con momento dipolar con la “misma” dirección y sentido, el momento dipolar total por unidad de volumen será,

$$\vec{P} = Nq\vec{\delta} \quad (43)$$

En general,  $\vec{P}$  variará de un punto a otro de un dieléctrico homogéneo. Pero valdrá lo mismo en todos los puntos dentro del dieléctrico donde el campo externo sea el mismo. Proponemos (sujeto a verificación experimental) una relación de proporcionalidad simple entre  $\vec{P}$  y  $\vec{E}$  la constante de proporcionalidad depende del material <sup>2</sup>

$$\vec{P} = cte \vec{E} \equiv \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad (44)$$

<sup>2</sup> Habrá moléculas orientadas en otras direcciones producto, por ejemplo, de la agitación térmica lo que da una orientación al azar con momento dipolar nulo en promedio. Pero en presencia de un campo eléctrico habrá una dirección preferencial y una cierta cantidad de moléculas por unidad de volumen  $N$  que se alinearán con el campo.

La inclusión de  $\epsilon_0$  en la constante permite que  $\chi$  sea un número adimensional que se llama polarizabilidad y se busca en internet. En el caso del capacitor de placas plano-paralelas,  $\vec{P}$  será uniforme. Es decir, en cada unidad de volumen tendremos  $N$  dipolos, no habrá ninguna región donde haya más cargas positivas que negativas y la densidad de dipolos será la misma en promedio. ¿Qué ocurre en la superficie del dieléctrico? Los electrones se han separado una distancia  $\delta$  de los núcleos y, en consecuencia, queda una carga efectiva sobre la superficie del dieléctrico: **densidad superficial de cargas de polarización**. En el volumen  $V=A\delta$ , hay  $N$  moléculas por unidad de volumen y en total  $NA\delta$  moléculas (dipolos), cada uno con una carga sobre la superficie  $q$ . La densidad superficial de carga será  $\sigma_p = Nq\delta = N|\vec{p}| = |\vec{P}|$  (45). En este caso el vector  $\vec{P}$  es perpendicular a las placas. De no serlo, la forma más general es

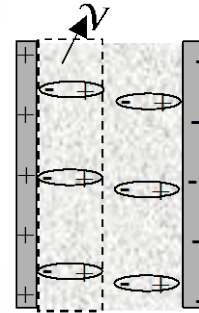


Fig.11. Dipolos moleculares

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n} \tag{45}$$

siendo  $\vec{n}$  la normal a la superficie del dieléctrico (el sentido de  $\vec{n}$  lo estudiaremos más adelante).

### Tema especial 3

Si  $\vec{P}$  es uniforme no habrá ninguna región del espacio donde haya más densidad de cargas positivas que negativas (ni la inversa), es decir tendremos la misma densidad promedio (como en el capacitor de placas plano-paralelas). Por ejemplo, en la Figura 12 se muestra un capacitor esférico (cáscaras conductoras con cargas  $Q$  y  $-Q$ ) con un material dieléctrico. El campo generado por  $Q$  es radial, los dipolos se acomodarán en promedio como indica la figura, apareciendo una densidad superficial de polarización en las superficies interior y exterior de la cáscara dieléctrica (tener cuidado: las densidades de cargas de polarización son distintas en cada superficie, lo que son iguales son las cantidades de carga positiva y negativa). La densidad de cargas de polarización en el volumen es nula, es decir, si se toma un volumen, la

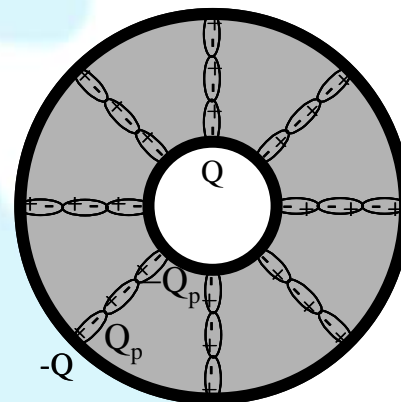


Fig.12. Dipolos moleculares en una geometría esférica

cantidad de líneas de  $\vec{P}$  que salen de ese volumen será igual a la cantidad de líneas que entren.

Pero si  $\vec{P}$  no es uniforme, dependiendo de cómo sea el vector polarización puede haber zonas donde haya más acumulación de cargas positivas que negativas (o viceversa). En este caso, como la densidad volumétrica de cargas de polarización no es nula, si se toma un volumen, la cantidad de líneas de  $\vec{P}$  que salen de ese volumen será distinta a la cantidad de líneas que entren. Es por eso que se tiene

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\rho_{polarizacion} \quad (46)$$

El signo negativo proviene de la definición del momento dipolar (su sentido es de  $-$  a  $+$ ). Veremos más adelante (sección 3.6) algunos ejemplos donde la densidad volumétrica de carga de polarización es nula a pesar de que  $\vec{P}$  no es uniforme.

### Fin tema especial 3

### 3.3 Ecuaciones electrostáticas en presencia de dieléctricos

Cuando estudiamos distribuciones de carga en el vacío, a partir del Teorema de Gauss vimos que:

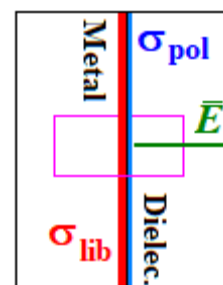
$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad (47)$$

Ahora, en presencia de dieléctricos corresponderá considerar TODA la carga: la “libre” y la de polarización (recordar Fig.7 y ec.(26)), es decir,  $Q_{enc} = Q_{libre} + Q_{polarización}$ . En consecuencia

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{Q_{libre} + Q_{polarización}}{\epsilon_0} \quad (48)$$

Vamos a analizar el tema signos haciendo un zoom de la figura 10c en el que vemos únicamente la placa de la izquierda y el dieléctrico pegado a la misma (la placa de la derecha es igual con signos cambiados).

Marcamos con rojo ( $\sigma_{lib}$ ) la densidad de carga libre superficial en el metal; con azul ( $\sigma_{pol}$ ) la densidad de carga de polarización superficial en el dieléctrico. La zona roja es más ancha que la azul para reflejar la ecuación (28). También mostramos en violeta una superficie de Gauss embebida parte en el metal y parte en el dieléctrico y, en verde, una línea de campo genérica.



Cuando aplicamos el teorema de Gauss con esta figura obtenemos:

$$E = \frac{\sigma_{lib} - \sigma_{pol}}{\epsilon_0}$$

Hemos hecho un cambio de notación importante:  $\sigma_{pol}$  está escrita en módulo. El signo, opuesto al de  $\sigma_{lib}$  está contemplado en el signo menos. Hemos hecho esto para poder igualar a  $\sigma_{pol}$  (ahora número positivo) con el módulo de  $P$  (que debe ser positivo, ecuación 45). Pasamos de término:

$$(\epsilon_0 E + P) = \sigma_{lib}$$

Esto sugiere definir un vector  $(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})$  que tendría la propiedad que su flujo a través de la superficie de Gauss mostrada sería igual a la carga libre encerrada ( $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{lib_{enc}}$ ). Este vector  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  se llama **desplazamiento** (nada se desplaza) y vamos a ver que es un auxiliar útil para estudiar sistemas con dieléctricos

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \tag{49}$$

Pero, para la mayoría de los materiales (lineales e isótropos)  $\vec{P} = cte \vec{E} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$  (ver ec.(44)), y

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E} \tag{50}$$

Como  $\chi > 0$  resulta  $\epsilon_r > 1$ . El valor  $\epsilon_r$  es la constante dieléctrica relativa (por eso la  $r$ ) y  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  es la constante dieléctrica (sin adjetivos).

La relación  $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{lib_{enc}}$  suele llamarse Ley de Gauss generalizada.

La situación parece complicada porque tenemos tres actores: el campo eléctrico, la polarización y el desplazamiento. Sin embargo, veremos que ésta aparente complicación nos permite desarmar un problema en partes más simples.

### Ejemplo

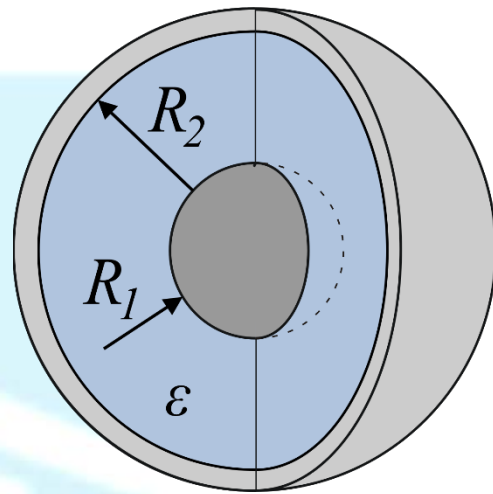
Una esfera de radio  $R_1$  y una cáscara esférica, de radio interior  $R_2$  y exterior  $R_3$  (no dibujado), ambas metálicas (zonas grises), forman un capacitor esférico. El espacio entre la esfera y la cáscara está ocupado por un dieléctrico de permitividad  $\epsilon$  (zona celeste). Si la esfera es conectada al borne positivo de una pila  $V_p$ , y la cáscara al borne negativo de la misma pila, determinar: los tres vectores eléctricos en las distintas regiones y la capacidad eléctrica del sistema.

Primera observación: los vectores  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$  y  $\vec{P}$  están relacionados entre sí por constantes positivas (ver ecuaciones anteriores); entonces todos tienen la misma dirección y sentido.

El enunciado dice que la esfera está conectada al borne positivo de la pila y la cáscara al negativo; entonces el campo eléctrico  $\vec{E}$  apunta de la esfera a la cáscara y lo mismo con  $\vec{D}$  y  $\vec{P}$ .

El sistema consta de cuatro regiones:

- a)  $r < R_1$
- b)  $R_1 < r < R_2$
- c)  $R_2 < r < R_3$
- d)  $R_3 < r$



Las zonas (a) y (c) son simples, perteneciendo al interior de un metal todos los campos son nulos. Quedan entonces las zonas (b) y (c).

No calcularemos directamente el campo eléctrico porque necesitamos saber las cargas libres y las de polarización (ecuación 48) y todavía no las conocemos.

Vamos a comenzar por el desplazamiento y su propiedad fundamental:

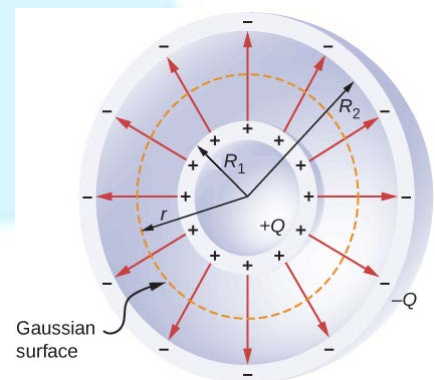
$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{lib,enc}$$

En línea naranja punteada vemos la superficie de Gauss esférica que hemos tomado para la zona (b). La carga libre encerrada es la que corresponde a la esfera interior. No conocemos cuánto vale, pero procederemos como si la supiéramos y le asignamos el valor  $Q$ .

La figura muestra las líneas de los campos en rojo, que también pueden representar a la normal a la superficie de Gauss. Por análisis anteriores sabemos que el campo sólo depende de la coordenada radial. Tenemos entonces:

$$\oint_S [D(r)\hat{r}] \cdot [dS\hat{r}] = Q$$

Al integrar recorreremos los elementos de área  $dS$  sobre la superficie de Gauss. Esto lo hacemos recorriendo los dos ángulos ( $\theta$  y  $\varphi$ ) y manteniendo constante  $r$ . Al hacer esto nos mantenemos a una distancia fija  $y$ , como la distribución de carga es uniforme, todos los valores angulares son iguales: El módulo del campo es el mismo





sobre la superficie de Gauss:

$$\oint_S [D(r)\hat{r}] \cdot [dS\hat{r}] = \oint_S [D(r)][dS] = D(r)\oint_S dS = D(r)4\pi r^2 = Q$$

$$D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

No conocemos aún el valor de  $Q$ , pero ya lo encontraremos.

Con la ayuda de (50) tenemos:

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}$$

El paso final es reconocer que la circulación del campo eléctrico entre la cáscara y la esfera debe ser igual al valor de la pila utilizada, es decir:

$$-\int_{R_2}^{R_1} E(r)\hat{r} \cdot dr\hat{r} = -\int_{R_2}^{R_1} \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = V_p$$

$$Q = \left[ \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \right] V_p = CV_p$$

Como era de esperar, la capacidad ha aumentado en el factor  $\epsilon$ .

Calculemos la polarización. Lo hacemos sólo en la zona (b) que es la única en la que hay dieléctrico. Usamos la (44) y la (50).

$$P(r) = \epsilon_0\chi E(r) = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)E(r)$$

Éste es el módulo de la polarización, la dirección y sentido las sabíamos de antes.

¿Qué pasa en la zona (d)? Extendemos la esfera de Gauss para que se encuentre en esa zona. Notamos que la carga encerrada es cero. Toda la carga positiva de la esfera se cancela con la negativa de la cáscara, entonces el miembro de la derecha de la ley de Gauss es cero. Que una integral sea nula no garantiza automáticamente que el integrando sea nulo. En nuestro caso, cuando recorremos la superficie de Gauss el signo del producto escalar entre el campo y el elemento de área no cambia. Ahora sí podemos decir que el integrando debe ser nulo con lo que  $D(r)=0$ , así como los otros vectores.

Síntesis: Al comenzar por el cálculo de  $\vec{D}$  bajamos la complejidad del problema porque separamos, en lo que hace al cálculo, las cargas libres de las de polarización. Luego calculamos de manera fácil los otros vectores. Son más pasos, pero cada uno es más simple.

### 3.4 Condiciones de frontera, de contorno o de borde

La ley de Gauss y la condición de rotor nulo del campo eléctrico no son útiles solamente para determinar los campos eléctricos generados por distribuciones de carga conocidas, sino que permiten establecer algunas propiedades de los campos a ambos lados de una interfaz formada por dos medios de propiedades dieléctricas conocidas. Supongamos que tenemos dos medios dieléctricos de constantes dieléctricas  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  tal que en la interfaz (superficie de separación) hay una densidad de carga libre (superficial) dada por  $\sigma_L$  (Figura 13). Tomemos un cilindro de altura  $h$  mucho menor que su radio  $R$ , es decir,  $h \rightarrow 0$  más rápidamente que su radio. Si aplicamos la Ley de Gauss Generalizada, tomando como superficie cerrada al cilindro, tendremos

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_{\text{Libre encerrada en } S} = \iint_{A_1} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \iint_{A_2} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{Sup lateral}} \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad (51)$$

Si se hace tender a cero la altura  $h$  (es decir, tomamos un “volumen” infinitesimal alrededor de la interfaz) podremos considerar que el campo sobre la interfaz es uniforme y vale  $\vec{D}_1$  (con cualquier dirección y sentido), debajo de la interfaz vale  $\vec{D}_2$  (con cualquier dirección y sentido) y en la superficie lateral tendrá un valor  $\vec{D}_{lat}$  (con cualquier dirección y sentido). Consecuentemente,

$$\begin{aligned} \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= \iint_{A_1} \vec{D}_1 \cdot \vec{n}_1 dS_1 + \iint_{A_2} \vec{D}_2 \cdot \vec{n}_2 dS_2 + \int_{-h/2}^0 \vec{D}_{lat} \cdot \vec{e}_r 2\pi R dl + \int_0^{h/2} \vec{D}_{lat} \cdot \vec{e}_r 2\pi R dl = \\ &= \vec{D}_1 \cdot \vec{n}_1 \pi R^2 + \vec{D}_2 \cdot \vec{n}_2 \pi R^2 + \vec{D}_{1_{lat}} \cdot \vec{e}_r \pi R h + \vec{D}_{2_{lat}} \cdot \vec{e}_r \pi R h \end{aligned} \quad (52)$$

Los tercer y cuarto términos del tercer miembro tenderán más rápidamente a cero que los dos primeros y, para un cilindro infinitesimal ( $h \rightarrow 0$  independientemente de  $R$ ), valdrá

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \vec{D}_1 \cdot \vec{n}_1 \pi R^2 + \vec{D}_2 \cdot \vec{n}_2 \pi R^2 = (\vec{D}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{D}_2 \cdot \vec{n}_2) \pi R^2 \quad (53)$$

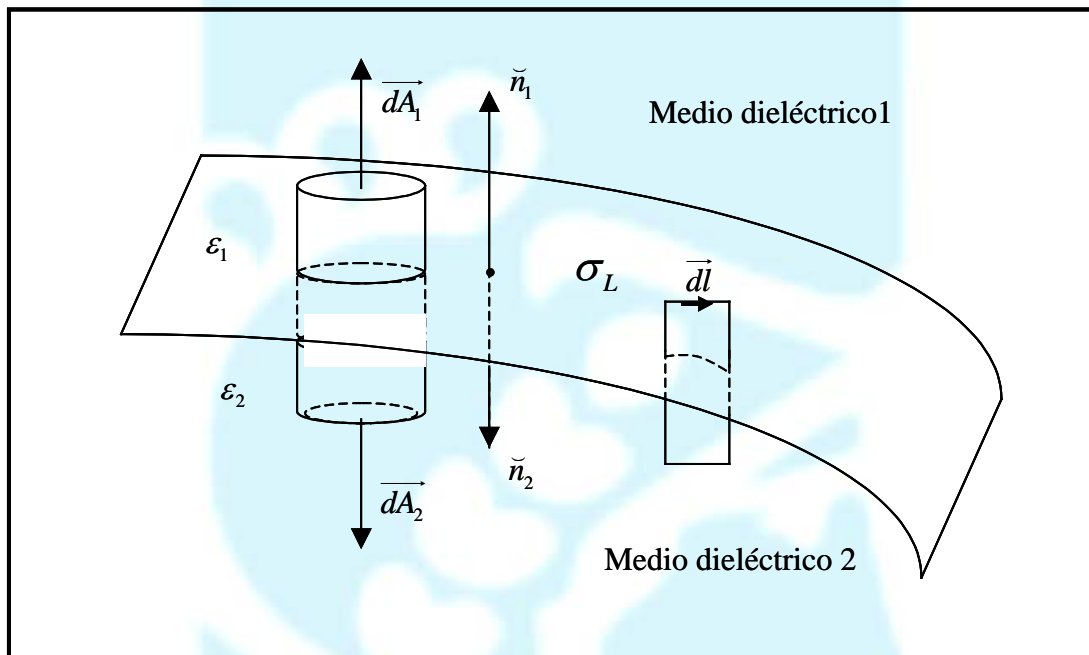
En consecuencia, de (57) y (59)

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = (\vec{D}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{D}_2 \cdot \vec{n}_2) \pi R^2 = \sigma_L \pi R^2 \quad (54)$$

Como  $-\vec{n}_1 = \vec{n}_2 = \vec{n}$ , resulta de (60)

$$\begin{aligned} (D_2 - D_1) \cdot \vec{n} &= \sigma_L \\ D_{2_n} - D_{1_n} &= \sigma_L \end{aligned} \quad (55)$$

Así, si en una superficie de discontinuidad no hay carga LIBRE, la componente normal del vector desplazamiento tiene el mismo valor de un lado que del otro. Se dice que se conserva. Si, en cambio, hay una densidad superficial de carga LIBRE, la situación será la de la Figura 14a).



**Fig.13.** Condiciones de borde entre dieléctricos

Es decir, nos será útil esta condición si sabemos que no hay carga LIBRE SUPERFICIAL porque si sabemos cuánto vale el vector desplazamiento a un lado, ya sabremos cuánto vale una componente del otro lado. Y mucho mejor sería si el vector desplazamiento tuviera solamente una componente normal a la interfaz. Bueno, nos ocurrirá muchas veces.... Y lo interesante es que si estamos considerando medios isótropos, lineales y homogéneos, y el vector desplazamiento tiene solamente componente normal a la interfaz, como  $D_1 = D_2$  de la ec.(50) deducimos que en la interfaz el campo eléctrico solamente tendrá componente normal y estará relacionado por  $\epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2$ . Es decir, con sólo tener  $D_1$  y las constantes dieléctricas sabremos cuánto vale el campo eléctrico a cada lado de la interfaz.

Pero esto no es todo. Ahora veamos si podemos determinar otra propiedad, pero esta vez a partir de la irrotacionalidad del campo eléctrico. Tomemos una curva cerrada como la de la

Figura 13 (donde “la altura”  $h$  tiende a cero más rápidamente que las longitudes de la curva “paralelas” a la interfaz. Calculemos la circulación del campo eléctrico en un camino cerrado.

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 = \oint_{l_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l}_1 + \oint_{l_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}_2 = \vec{E}_1 \cdot l_1 \vec{t} + \vec{E}_2 \cdot l_2 (-\vec{t}) \quad (56)$$

donde  $\vec{t}$  es un versor tangencial a la superficie en la dirección de la curva. De la ec. (56) se deduce que

$$E_{1,t} = E_{2,t} \quad (57)$$

lo que significa que la componente tangencial del campo eléctrico en condiciones electrostáticas no cambia (ni en módulo ni en sentido) en una interfaz. Dicho de otro modo, la componente tangencial es continua. Esto está esquematizado en la Fig.14b), ya que la componente tangencial de  $\vec{E}$  cuando la normal a la interfaz es el versor  $\vec{x}$  se escribe  $\vec{E} \times \vec{x}$ .

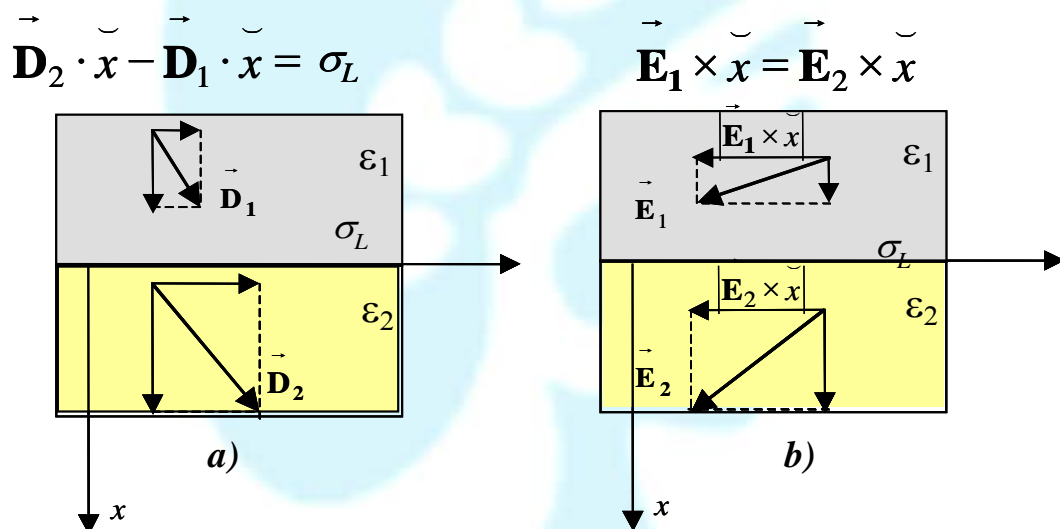


Fig.14.a) Condición para  $D$  normal b) para  $E$  tangencial a la interfaz

### 3.5 Tema especial 4. Buscando la normal adecuada...

El problema que siempre se presenta es que no es fácil acordarse cuál es la normal  $\vec{n}$  en una interfaz. Vamos a tratar de “jugar” con las relaciones entre los campos  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{P}$  que nos puede ayudar a dar un cierre a ellos. Por un lado, tenemos la relación general entre los vectores desplazamiento eléctrico  $\vec{D}$ , campo eléctrico  $\vec{E}$  y polarización eléctrica  $\vec{P}$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (58)$$

Veamos qué obtenemos si tomamos la divergencia de (64)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (59)$$

El miembro de la izquierda de (65) corresponde a  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{Libre}$ , el primer término del segundo miembro  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  y el segundo  $\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\rho_{polarizacion}$ , es decir, obtenemos

$$\rho = \rho_{Libre} + \rho_{polarizacion} \quad (60)$$

Ahora hagamos el producto es escalar con la normal a una superficie  $\vec{n}$  (después discutiremos qué es esta normal)

$$\vec{D} \cdot \vec{n} = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{n} + \vec{P} \cdot \vec{n} \quad (61)$$

El primer miembro está relacionado con  $\sigma_L$ , el primer término del segundo miembro con la densidad superficial total de carga  $\sigma$  y el segundo con  $\sigma_p$ , es decir

$$\sigma_T = \sigma_L + \sigma_p \quad (62)$$

Como

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = \sigma_L \quad (63)$$

Si  $\vec{D}_1 = \epsilon_0 \vec{E}_1 + \vec{P}_1$  y  $\vec{D}_2 = \epsilon_0 \vec{E}_2 + \vec{P}_2$  tendremos que

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = \epsilon_0 (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n} + (\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot \vec{n} = \sigma_L = \sigma_T - \sigma_p \quad (64)$$

Así el primer término del segundo miembro se podrá relacionar con la densidad superficial total de carga y el segundo con la de polarización.

$$(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot \vec{n} = -\sigma_p \quad (65)$$

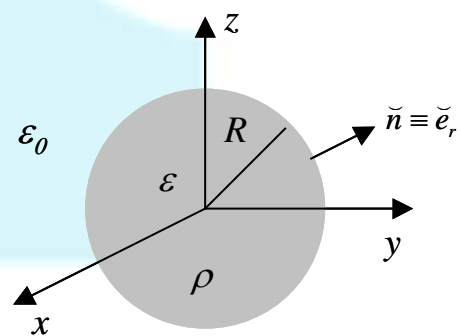
¿Qué significa? Veamos ahora algunos casos particulares en interfaces dieléctrico-conductor y dieléctrico-dieléctrico para ver cómo usar las condiciones de contorno

#### Fin tema especial 4

### 3.5 Aplicaciones

#### 3.6.1 Ejemplo 1

Consideremos que tenemos una distribución esférica de carga  $\rho$ , pero no en el vacío sino distribuida uniformemente en un cuerpo de material dieléctrico de constante dieléctrica  $\epsilon$  (de forma



**Fig.16.** Distribución esférica de densidad de carga  $\rho$  uniforme

esférica). Este cuerpo está en el vacío. Queremos determinar el campo eléctrico en todo el espacio.

Como siempre, dibujamos un sistema de coordenadas (aunque es indistinto por ahora usar terna derecha o izquierda debemos acostumbrarnos a usar terna derecha porque cuando estudiemos el campo magnético no será lo mismo una que otra). Como siempre plantearemos el problema viendo si podemos resolverlo a través de la Ley de Gauss y no a través de la Ley de Coulomb generalizada para medios dieléctricos.

Recordemos: debemos encontrar una superficie cerrada donde podamos conocer la dirección del campo y que es constante sobre ella. De esta manera, si conocemos la carga encerrada, podremos calcular el campo a través de la Ley de Gauss. Pero, ¿podemos usar la Ley de Gauss? ¿O debemos usar la Ley de Gauss generalizada? Si quisiéramos usar la Ley de Gauss (“la del campo eléctrico”) deberíamos conocer no solamente las cargas libres (“las que están puestas”) sino también las de polarización porque la expresión que corresponde es

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{total\ enc.\ por\ S}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{V(S)} \rho_{total} dV$$

En principio, el campo y el vector desplazamiento podrían depender de las tres coordenadas (usaremos esféricas) y tener tres componentes (también usaremos las esféricas). Pero, haciendo los mismos razonamientos que hacíamos cuando no había medio material (una distribución esférica de carga con densidad volumétrica uniforme), el campo no puede depender de  $\varphi$  ni de  $\theta$ . Tampoco puede tener componentes  $\varphi$  ni  $\theta$  (ver Capítulo I). Tanto  $\vec{E}$  como  $\vec{D}$  solamente pueden tener componente radial y podrían depender únicamente de la coordenada  $r$ . En consecuencia, si tomamos como superficie para aplicar la Ley de Gauss Generalizada una esfera de radio  $r$  centrada en el origen de coordenadas de la Fig.15, tendremos la seguridad que en todos los puntos de la superficie de la esfera del vector desplazamiento tendrá el mismo módulo y será paralelo a la normal a la superficie.

Si bien podríamos saber cualitativamente cómo se acomodan las cargas de polarización, no lo sabemos cuantitativamente. ¿Cómo lo podemos saber? Cualitativamente podemos pensar que si  $\rho$  es uniforme y positivo, las cargas positivas de las moléculas serán repelidas y, en consecuencia, “tratan de irse lo más lejos posible de la esfera” cargada positivamente y, las negativas son atraídas. Pero, como no es un material conductor (es decir, los electrones no pueden moverse libremente, no se independizan las cargas positivas de las negativas) ni las

cargas pueden escaparse de la esfera, habrá una densidad neta positiva de carga en la superficie de la misma.

Pasemos al cálculo y comprobemos nuestro razonamiento.

Consideraremos la zona I (interior a la esfera;  $r < R$ ) y la zona II (el vacío,  $r > R$ ) y usemos ec.(54)

- Zona I

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_{\text{libre enc. por } S} = \iiint_{V(S)} \rho_{\text{libre}} dV$$

donde  $S$  será una esfera de radio  $r$  concéntrica a la distribución de cargas. La carga libre encerrada en dicha superficie será la parte proporcional de carga que corresponda, es decir,

$$q_{\text{encerrada}} = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 = Q \frac{r^3}{R^3} \quad (\text{siendo } Q \text{ la carga total libre en la esfera}) \text{ porque } \rho \text{ es uniforme}$$

(¿Cuál sería si  $\rho$  dependiera de  $r$ ? ¿Se podría calcular el vector desplazamiento a través de la Ley de Gauss generalizada?). Sobre la superficie de la esfera  $\vec{D} = D(r)\vec{e}_r$  y

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = D(r) 4\pi r^2 = Q \frac{r^3}{R^3} \text{ de lo que se deduce que } D(r) = \frac{Q}{4\pi R^3} r \text{ para } r < R$$

- Zona II

En este caso para cualquier superficie esférica con  $r > R$ , la carga encerrada será  $Q$  y

$$D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

Como la constante dieléctrica del material es  $\epsilon$  y la de afuera es  $\epsilon_0$  y como  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

$$\vec{D}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{Qr}{4\pi R^3} \vec{e}_r & r < R \\ \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{e}_r & r > R \end{cases} \quad \vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{Qr}{4\pi\epsilon R^3} \vec{e}_r & r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r & r > R \end{cases}$$

También podemos calcular el vector polarización, ya que de (51)  $\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}$ . Se tiene, entonces,

$$\vec{P}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{Qr}{4\pi\epsilon R^3} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \vec{e}_r & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

El vector polarización tiene, entonces sentido radial Como va de cargas negativas a positivas, las

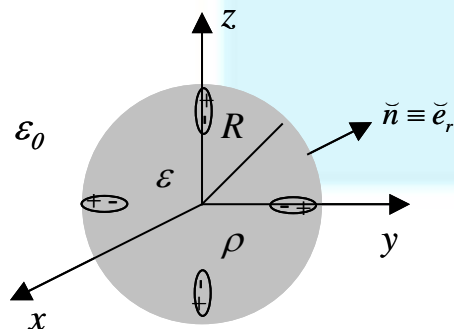


Fig.16. Dipolos en una geometría esférica

moléculas se alinean como indica la Fig. 16. ¿Qué significa el cero en la polarización? El resultado es correcto porque en  $r > R$  hay vacío y, por lo tanto, no hay moléculas. También vemos que, la componente normal del vector desplazamiento se conserva en la interfaz (lo que está bien porque no hay carga superficial libre en ella). Es decir, de (61) se obtiene

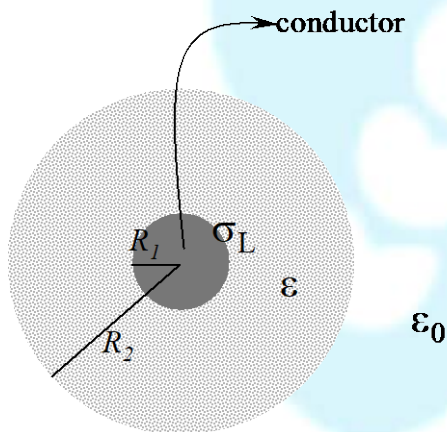
$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{e}_r = \sigma_L = 0$$

¿Cuánto vale la densidad superficial de carga de polarización? ¿Qué normal tomamos? ¿La exterior o la interior? La respuesta es la exterior (aunque deberemos tener cuidado si en lugar de vacío hay otro material) Entonces

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{e}_r \Big|_{r=R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon R^2} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) > 0$$

### 3.6.2 Conductor cargado-dieléctrico descargado-vacío

Consideremos un conductor esférico de radio  $R_1$  cargado con una carga  $Q$  y rodeado de un dieléctrico de constante dieléctrica  $\epsilon$ .



La densidad de carga libre en la superficie del

conductor es:  $\sigma_L = \frac{Q}{4\pi R_1^2}$ .

Si  $\sigma_L$  es positivo, los dipolos permanentes o inducido se acomodarán de forma tal que aparecerá una densidad superficial de carga inducida negativa  $\sigma_1$  en  $R_1$  (del lado del dieléctrico) y otra positiva  $\sigma_2$  en  $R_2$  (del lado del dieléctrico). En el vacío no hay materia y no habrá nada que se polarice.

**Fig.17.** Conductor cargado-dieléctrico descargado-vacío

Resolvamos analíticamente. A partir de la Ley de

Gauss generalizada y teniendo en cuenta la simetría del problema (ya discutida ampliamente en el apunte de Electroestática), se obtiene

$$\vec{D}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{e}_r = \sigma_L \frac{R_1^2}{r^2} \vec{e}_r & R_2 > r > R_1 \\ \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{e}_r = \sigma_L \frac{R_1^2}{r^2} \vec{e}_r & r > R_2 \end{cases} \quad \vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \vec{e}_r = \frac{1}{\epsilon} \sigma_L \frac{R_1^2}{r^2} \vec{e}_r & R_2 > r > R_1 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma_L \frac{R_1^2}{r^2} \vec{e}_r & r > R_2 \end{cases}$$



$$\vec{P}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{Q(\epsilon - \epsilon_0)}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r = \frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon} \sigma_L \frac{R_1^2}{r^2} \vec{e}_r & R_2 > r > R_1 \\ 0 & r > R_2 \end{cases}$$

Como era de esperar, en  $R_2$  el vector desplazamiento no se ve alterado, ya que es normal a la superficie de separación y no hay carga libre superficial en esa interfaz. En cambio, en  $R_1$  hay densidad superficial de carga libre y el vector desplazamiento no será continuo pues.  $(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = \sigma_L$ . Acá sabemos que  $\sigma_L > 0$ . Si 1 es el conductor y 2 el dieléctrico,  $\vec{D}_1 = 0$  y  $\vec{D}_2$  apunta en la dirección de  $\vec{e}_r$ . Entonces la normal debe tener el sentido de  $\vec{e}_r$  para que  $\sigma_L > 0$  (es decir, es el normal exterior a la superficie esférica). Como  $\vec{D}_1 = \vec{E}_1 = \vec{P}_1 = 0$ , de (70) resulta que en la interfaz

$$\sigma_P|_{r=R_1} = \vec{P}_2 \cdot \vec{n}|_{r=R_1} = \sigma_L \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) > 0$$

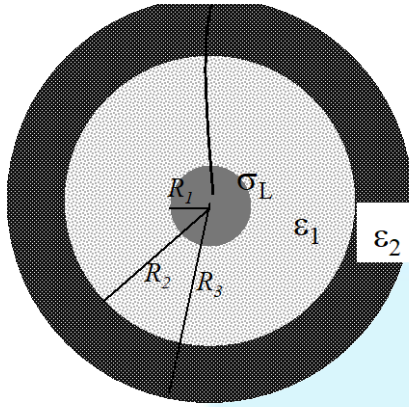
¿Qué significa  $\sigma_P|_{r=R_1} > 0$ ? Como el signo había sido puesto arbitrariamente en ec.(26), se debe interpretar que la densidad superficial de polarización en  $R_1$  es negativa (como se había deducido “conceptualmente”). En la segunda interfaz (es decir en la interfaz dieléctrico-vacío), tendremos  $\vec{P}_2 = 0$  aunque  $\vec{D}_2 = \vec{E}_2 \neq 0$  y

$$\sigma_P|_{r=R_2} = -\vec{P}_1 \cdot \vec{n}|_{r=R_2} = -\sigma_L \frac{R_1^2}{R_2^2} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) < 0$$

Lo que significa que en la superficie interior de la esfera dieléctrica en  $r=R_2$  la densidad de carga superficial de polarización es positiva.

### 3.6.3 Conductor cargado –dieléctrico descargado-dieléctrico descargado-vacío

La resolución de este problema es análoga a la del problema anterior en cuanto a la obtención de los campos eléctricos, vectores desplazamiento y vectores polarización. El problema que aquí se presenta es que, en principio, podríamos decir que en  $R_1$  (en el dieléctrico), la densidad de carga superficial de polarización será negativa si  $\sigma_L > 0$ , en  $R_2$  (pero dentro del dieléctrico 1) la carga superficial de polarización será positiva; en  $R_2$  (pero dentro del dieléctrico 2) la carga superficial de polarización será negativa; y en  $R_3$  (pero dentro del dieléctrico 3) la carga superficial de polarización será positiva; y en  $R_3$  (pero en el vacío) la carga superficial de polarización será nula.



**Fig.18.** Conductor cargado, dieléctrico descargado-dieléctrico descargado-vacío

Pero ¿cómo será la densidad de carga neta de polarización en  $R_2$ ? ¿Positiva o negativa?

$\epsilon_0$  En este caso deberemos aplicar con cuidado (71). Si tomamos como  $\vec{n}$  a  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{P}_1$  corresponderá al vector polarización en el medio con constante dieléctrica  $\epsilon_1$  y  $\vec{P}_2$  corresponderá al vector polarización en el medio con constante dieléctrica  $\epsilon_2$ .

Tendremos

$$\vec{D}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{e}_r = \sigma_L \frac{R_1^2}{r^2} \vec{e}_r & R_2 > r > R_1 \\ \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{e}_r = \sigma_L \frac{R_1^2}{r^2} \vec{e}_r & R_3 > r > R_2 \\ \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{e}_r = \sigma_L \frac{R_1^2}{r^2} \vec{e}_r & r > R_3 \end{cases}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_1 r^2} \vec{e}_r = \frac{1}{\epsilon_1} \sigma_L \frac{R_1^2}{r^2} \vec{e}_r & R_2 > r > R_1 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 r^2} \vec{e}_r = \frac{1}{\epsilon_2} \sigma_L \frac{R_1^2}{r^2} \vec{e}_r & R_3 > r > R_2 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma_L \frac{R_1^2}{r^2} \vec{e}_r & r > R_3 \end{cases}$$

$$\vec{P}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{Q(\epsilon_1 - \epsilon_0)}{4\pi\epsilon_1 r^2} \vec{e}_r = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0)}{\epsilon_1} \sigma_L \frac{R_1^2}{r^2} \vec{e}_r & R_2 > r > R_1 \\ \frac{Q(\epsilon_2 - \epsilon_0)}{4\pi\epsilon_2 r^2} \vec{e}_r = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_0)}{\epsilon_2} \sigma_L \frac{R_1^2}{r^2} \vec{e}_r & R_3 > r > R_2 \\ 0 & r > R_3 \end{cases}$$

Entonces, la densidad de carga superficial NETA en  $R_2$  será

$$(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot \vec{n} = -\sigma_p = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_0)}{\epsilon_2} \sigma_L - \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0)}{\epsilon_1} \sigma_L = \epsilon_0 \left( \frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2} \right) \sigma_L = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1 \epsilon_2} (\epsilon_2 - \epsilon_1) \sigma_L$$

Si  $\sigma_L > 0$  y  $\epsilon_2 > \epsilon_1$  resulta  $\sigma_p < 0$ , lo que significa que la densidad superficial neta es negativa. Esto se entiende de la siguiente manera: si la densidad superficial neta es negativa, hay más cargas negativas (del lado del dieléctrico 2) que positivas (del lado del dieléctrico 1), lo que significa que el dieléctrico 2 “se pudo” polarizar más (y eso es lo que significa tener una constante dieléctrica mayor). Tarea: considerar los otros casos (respecto al signo de  $\sigma_L$ ) y distinta relación de constantes dieléctricas.

### 3.6 Sistemas con más de un capacitor

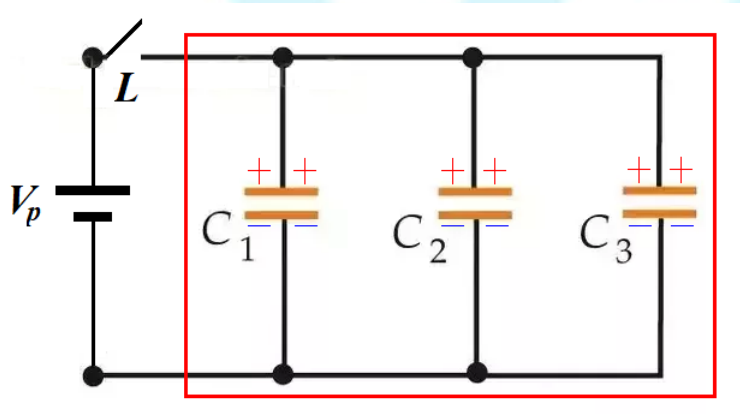
Sistemas eléctricos y electrónicos utilizan capacitores con objetivos más amplios que los que mencionamos en un capítulo previo (memorias de computadora y pantalla táctil).

De los infinitos casos que podemos tratar hay dos que, por la frecuencia de utilización y, por los conceptos subyacentes, resultan interesantes de presentar para construir sistemas más complejos.

#### Primer ejemplo

Consideramos el sistema formado por tres capacitores  $C_1, C_2, C_3$  cuyas placas superiores están unidas entre sí por conductores (trazo negro). Lo mismo ocurre con las placas inferiores.

Suponemos que inicialmente los capacitores se encuentran descargados. Al cerrar la llave la pila transferirá cargas de forma tal que los capacitores se cargan con la polaridad indicada.



Nos preguntamos qué cantidad de carga ha transferido la pila una vez que se ha alcanzado el equilibrio.

Movamos una hipotética carga de prueba desde el terminal positivo de la pila hasta cualquiera de las placas cargadas positivamente. Notamos que no hacemos trabajo porque nos desplazamos dentro de un metal en condiciones electrostáticas. Lo mismo podemos decir si

vamos desde el borne negativo de la pila hasta una de las placas negativas. Concluimos que la diferencia de potencial entre las placas de cualquiera de los capacitores es igual a  $V_p$ .

Aplicamos la relación entre carga, capacidad y diferencia de potencial para cada uno de los capacitores:

$$Q_1 = C_1 V_p$$

$$Q_2 = C_2 V_p$$

$$Q_3 = C_3 V_p$$

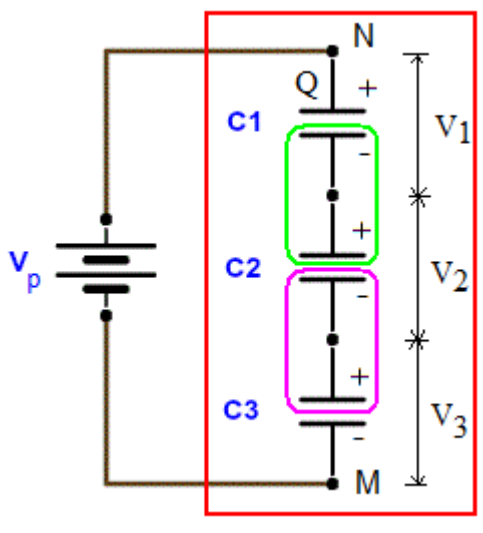
$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_{tot} = (C_1 + C_2 + C_3) V_p$$

La cantidad total de carga que ha transferido la pila es la suma de las cargas entregadas a cada capacitor. Visto desde el lado de la pila, todo lo encerrado dentro de la caja roja equivale a un capacitor igual a la suma de los tres considerados. Es como si tuviéramos un capacitor más grande. Es fácil generalizar el ejemplo para cualquier número de capacitores.

Esta configuración de capacitores suele llamarse...

### Segundo ejemplo

Ahora, la placa inferior de  $C_1$  está conectada a la superior de  $C_2$  y la inferior de  $C_2$ , a la superior de  $C_3$ . Hacemos la misma pregunta que en el primer ejemplo.



Este ejemplo es más difícil que el anterior porque hay temas a discutir.

La placa superior del uno toma carga positiva y la inferior del tres negativa por cómo están conectados a la pila. Los electrones contenidos dentro de la región verde se mueven hacia la placa inferior del dos porque son atraídos por la placa superior del uno. De forma similar, la

placa superior del tres queda con carga positiva. Sean  $Q_s$  las cargas de las placas superiores y  $Q_i$  las de las inferiores.

Como la pila sólo transfiere cargas tenemos:  $Q_{s1} = -Q_{i3}$ .

Las placas dentro de la zona verde estaban inicialmente descargadas; como no intercambiaron carga con ningún otro objeto, el conjunto debe permanecer neutro:  $Q_{s2} = -Q_{i1}$ . Lo mismo ocurre con las placas dentro de la zona violeta:  $Q_{s3} = -Q_{i2}$ .

Además, estas cargas deben satisfacer que el campo eléctrico en el interior de los metales sea nulo; esto se consigue si, y sólo si, son todas iguales en módulo (verificarlo).

En síntesis, los módulos de las cargas de todas las placas son iguales y la llamamos simplemente  $Q$ .

Ahora calcularemos la diferencia de potencial entre el punto N (final) y el M (inicial), aplicando la relación entre carga, capacidad y diferencia de potencial y recordando que las tres variables son definidas positivas (el signo lo ponemos mirando el sentido de  $\vec{E}$  y  $d\vec{l}$ ):

$$V_p = V(N) - V(M) = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = Q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_2} \right)$$

$$V_p \frac{1}{\left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_2} \right)} = Q$$

Es fácil generalizar esta expresión para cualquier número de capacitores.

Visto desde el lado de la pila, todo lo encerrado dentro de la caja roja equivale a un extraño capacitor cuyo valor, para el caso de tener  $N$  capacitores es:

$$C = \frac{1}{\sum_{k=1}^N \frac{1}{C_k}}$$

Esta configuración de capacitores suele llamarse...

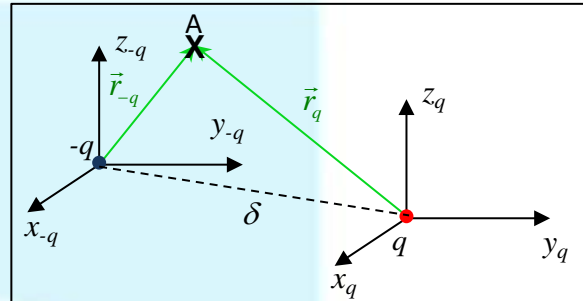
### ***Tema especial 5. APENDICE: El dipolo puntual***

Un dipolo eléctrico puntual consiste en un par de cargas puntuales de la misma magnitud  $q$  y distinto signo, separadas una distancia que llamaremos  $\delta$  (usualmente se considera pequeña aunque no sepamos bien qué es para nosotros "pequeña" por ahora). A esta distribución de cargas se la llama también "electrete".

¿Por qué puede ser de interés dedicarle tiempo a un dipolo eléctrico? Porque sirve para explicar cómo se comportan los materiales cuando están inmersos en campos eléctricos

estáticos. Por otra parte, si un dipolo oscila en el tiempo podremos tener una antena. Pero esto es mucho más complicado y no está dentro de los alcances de esta materia.

Cuando se calcula el campo producido por un conjunto de cargas discretas, el problema que se les presenta (después de comprender qué significa el Principio de Superposición) es más geométrico y algebraico que conceptual. La situación en este caso sería la siguiente: dos cargas  $q$  y  $-q$  separadas una cierta distancia  $\delta$  generan campo eléctrico en todos los puntos del espacio, que, en forma genérica, designamos con la letra A. Parece muy sencillo escribir el campo generado por ambas cargas, ya que sabemos cuál es el campo generado en todo el espacio por una carga puntual  $q$  si la carga está ubicada en el origen de coordenadas



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \frac{\vec{e}_r}{|\vec{r}|^2}$$

donde  $\vec{e}_r$  es el versor radial en coordenadas esféricas (es decir, uno el origen de coordenadas con el punto donde se está calculando el campo). Así tendremos que el campo eléctrico generado en el punto A por las cargas  $q$  y  $-q$  será

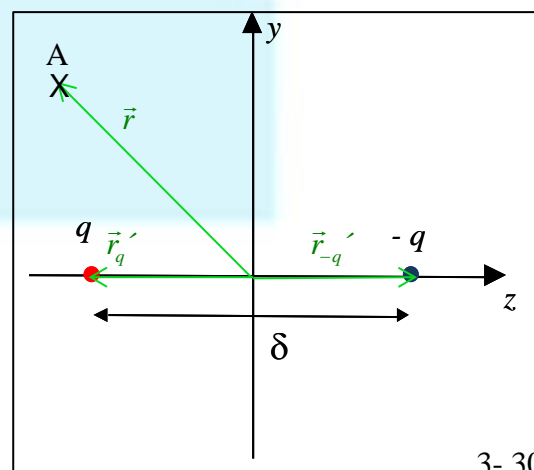
$$\vec{E}_q(\vec{r}_q) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\vec{r}_q}{|\vec{r}_q|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\vec{e}_{r_q}}{|\vec{r}_q|^2} \quad \text{y} \quad \vec{E}_{-q}(\vec{r}_{-q}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (-q) \frac{\vec{r}_{-q}}{|\vec{r}_{-q}|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (-q) \frac{\vec{e}_{r_{-q}}}{|\vec{r}_{-q}|^2}$$

respectivamente.

Al campo eléctrico total podríamos escribirlo como

$$\vec{E}_T(A) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\vec{e}_{r_q}}{|\vec{r}_q|^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (-q) \frac{\vec{e}_{r_{-q}}}{|\vec{r}_{-q}|^2}$$

Observen que puse "A" porque no podría haber puesto ni  $\vec{r}_q$  ni  $\vec{r}_{-q}$  porque "se miden" desde lugares diferentes. Como siempre debemos elegir un sistema de coordenadas común a ambas cargas para que el punto A esté caracterizado por solo 3 coordenadas. Lo primero que hay que observar es que el sistema tiene simetría de revolución



alrededor del eje que une a las cargas. De esta manera, resolviendo el problema en un plano, fácilmente se podrá extender a todo el espacio. Ya que esto corresponde a lo que se llama simetría cilíndrica, elegiremos el eje de coordenadas  $z$  coincidente con el eje de simetría. Si, además, el origen del sistema de coordenadas se pone a mitad de distancia de las cargas, la expresión del campo va a resultar muy simétrica. Pero no es imprescindible.

Escribamos el campo generado por cada carga en cualquier punto del plano  $yz$  (Observar que las dos figuras se pueden relacionar por  $\vec{r} = \vec{r}_q + \vec{r}'_q = \vec{r}_{-q} + \vec{r}'_{-q}$ )

$$\vec{E}_q(0, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\vec{r} - \vec{r}'_q}{|\vec{r} - \vec{r}'_q|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{(y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) - (-\delta/2)\vec{e}_z}{\left[y^2 + \left(z + \delta/2\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{y\vec{e}_y + \left(z + \delta/2\right)\vec{e}_z}{\left[y^2 + \left(z + \delta/2\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$\vec{E}_{-q}(0, y, z) = \frac{(-q)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'_{-q}}{|\vec{r} - \vec{r}'_{-q}|^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{(y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) - (+\delta/2)\vec{e}_z}{\left[y^2 + \left(z - \delta/2\right)^2\right]^{3/2}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{y\vec{e}_y + \left(z - \delta/2\right)\vec{e}_z}{\left[y^2 + \left(z - \delta/2\right)^2\right]^{3/2}}$$

En consecuencia el campo generado por el dipolo en el plano  $yz$  resulta

$$\vec{E}(0, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left[ \frac{y\vec{e}_y + \left(z + \delta/2\right)\vec{e}_z}{\left[y^2 + \left(z + \delta/2\right)^2\right]^{3/2}} - \frac{y\vec{e}_y + \left(z - \delta/2\right)\vec{e}_z}{\left[y^2 + \left(z - \delta/2\right)^2\right]^{3/2}} \right]$$

Si queremos extenderlo a todo el espacio se puede pensar de dos maneras:

1. Como la coordenada  $x$  juega el mismo papel que la  $y$ , podemos extender a

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left[ \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + \left(z + \delta/2\right)\vec{e}_z}{\left[x^2 + y^2 + \left(z + \delta/2\right)^2\right]^{3/2}} - \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + \left(z - \delta/2\right)\vec{e}_z}{\left[x^2 + y^2 + \left(z - \delta/2\right)^2\right]^{3/2}} \right]$$

Conviene escribir las componentes cartesianas del campo para poder observar mejor la dependencia con las coordenadas

$$E_x(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q x \left\{ \frac{1}{\left[x^2 + y^2 + \left(z + \delta/2\right)^2\right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[x^2 + y^2 + \left(z - \delta/2\right)^2\right]^{3/2}} \right\}$$

$$E_y(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q y \left\{ \frac{1}{\left[ x^2 + y^2 + \left( z + \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[ x^2 + y^2 + \left( z - \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} \right\}$$

$$E_z(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left\{ \frac{\left( z + \frac{\delta}{2} \right)}{\left[ x^2 + y^2 + \left( z + \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} - \frac{\left( z - \frac{\delta}{2} \right)}{\left[ x^2 + y^2 + \left( z - \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} \right\}$$

2. Para pasar del plano yz a todo el espacio, se puede transformar la coordenada y en la radial de cilíndricas de nuestro sistema de coordenadas. Es decir, pasamos de

$$\vec{E}(0, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left[ \frac{y\tilde{e}_y + \left( z + \frac{\delta}{2} \right)\tilde{e}_z}{\left[ y^2 + \left( z + \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} - \frac{y\tilde{e}_y + \left( z - \frac{\delta}{2} \right)\tilde{e}_z}{\left[ y^2 + \left( z - \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} \right]$$

a

$$\vec{E}(\rho, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left[ \frac{\rho\tilde{e}_\rho + \left( z + \frac{\delta}{2} \right)\tilde{e}_z}{\left[ \rho^2 + \left( z + \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} - \frac{\rho\tilde{e}_\rho + \left( z - \frac{\delta}{2} \right)\tilde{e}_z}{\left[ \rho^2 + \left( z - \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} \right]$$

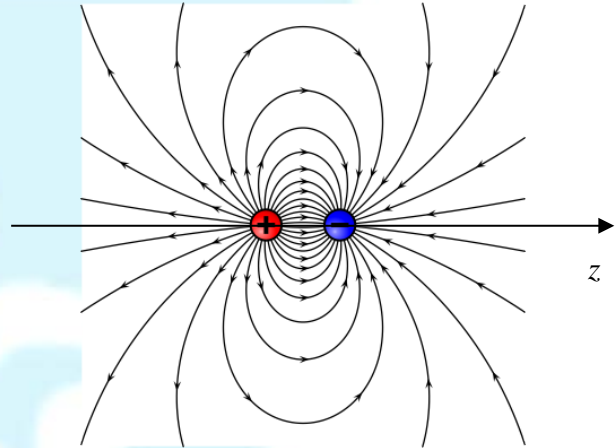
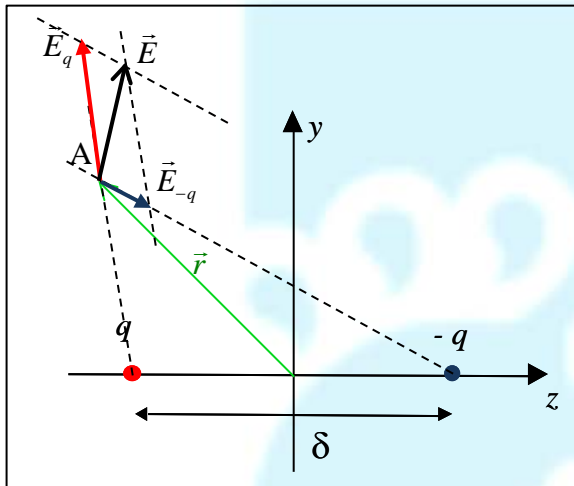
Ahora vamos a tratar de estudiar el comportamiento del campo eléctrico para ver si podemos hacer un esquema cualitativo de las líneas de campo (Recuerden que el campo eléctrico en un punto del espacio es tangente a la línea de campo en ese punto). Como existe simetría de revolución alrededor del eje z, estudiaremos el campo en el plano yz i.e. en  $x=0$ . Resulta, entonces

$$E_x(0, y, z) = 0$$

$$E_y(0, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q y \left\{ \frac{1}{\left[ y^2 + \left( z + \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[ y^2 + \left( z - \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} \right\}$$



$$E_z(0, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left\{ \frac{(z + \delta/2)}{\left[ y^2 + (z + \delta/2)^2 \right]^{3/2}} - \frac{(z - \delta/2)}{\left[ y^2 + (z - \delta/2)^2 \right]^{3/2}} \right\}$$



Es decir, el campo eléctrico en un punto del plano solo tiene componentes en el plano (determinado por las cargas y el punto). Determinar los valores del campo en distintos puntos es una tarea sencilla. No así dibujar las líneas de campo. Por suerte, hay programas que lo pueden hacer (algunos solo aproximadamente como el FEMM).

En particular, a lo largo del eje  $y$  (i.e. en  $x = z = 0$ ) el campo eléctrico solamente tiene componente  $z$  ya que

$$E_x(0, y, 0) = 0$$

$$E_y(0, y, 0) = 0$$

$$E_z(0, y, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\delta}{\left[ y^2 + (\delta/2)^2 \right]^{3/2}}$$

Sobre el eje  $z$ , vale  $y=0$  por lo que el campo tiene solo componente  $z$

$$E_z(0,0,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left\{ \frac{(z + \delta/2)}{\left[ (z + \delta/2)^2 \right]^{3/2}} - \frac{(z - \delta/2)}{\left[ (z - \delta/2)^2 \right]^{3/2}} \right\} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left\{ \frac{(z + \delta/2)}{\left| z + \delta/2 \right|^3} - \frac{(z - \delta/2)}{\left| z - \delta/2 \right|^3} \right\} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left\{ \frac{\text{sgn}(z + \delta/2)}{\left| z + \delta/2 \right|^2} - \frac{\text{sgn}(z - \delta/2)}{\left| z - \delta/2 \right|^2} \right\}$$

Analicemos qué pasa para las “3 zonas”. Si  $z > \delta/2$ ,  $\text{sgn}(z + \delta/2)$  y  $\text{sgn}(z - \delta/2)$  son positivos, por lo que  $E_z < 0$ . Si  $z < -\delta/2$ ,  $\text{sgn}(z + \delta/2)$  y  $\text{sgn}(z - \delta/2)$  son negativos y  $E_z < 0$  (probarlo). Si  $-\delta/2 < z < \delta/2$ ,  $E_z > 0$  (probarlo). Hint: consideren  $z = \pm \frac{3}{2}\delta$  y  $z = 0, \pm \frac{\delta}{4}$ .

De estas expresiones es fácil deducir que para puntos del espacio a lo largo de la mediatriz y alejados del dipolo (i.e.  $y \gg \delta$ ) el campo disminuye como  $1/y^3$ . Por la simetría de revolución el mismo resultado corresponde a cualquier punto alejado del dipolo sobre el plano  $xy$ . Analicemos ahora cuál es la dependencia del campo con la distancia al dipolo cuando se considera un punto sobre el eje  $z$  (i.e.  $x=y=0$ )

$$E_z(0,0,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left\{ \frac{(z + \delta/2)}{\left[ (z + \delta/2)^2 \right]^{3/2}} - \frac{(z - \delta/2)}{\left[ (z - \delta/2)^2 \right]^{3/2}} \right\} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left\{ \frac{1}{(z + \delta/2)^2} - \frac{1}{(z - \delta/2)^2} \right\}$$

Como para  $z \gg \delta$

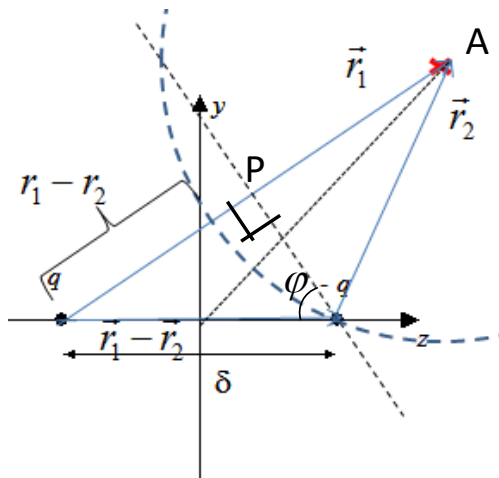
$$\frac{1}{(z \pm \delta/2)^2} = \frac{1}{z^2 (1 \pm \delta/2z)^2} \approx \frac{1}{z^2} (1 \mp \delta/z)$$

el campo eléctrico resulta

$$E_z(0,0,z) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \delta \frac{2}{z^3}$$

Es decir, que alejándonos del dipolo a lo largo de los ejes  $x$ ,  $y$  o  $z$  el campo eléctrico tiene una dependencia de la inversa del cubo de la distancia. Por supuesto, si nos alejamos más (límite para distancia tendiendo a infinito) el campo tiende a cero (lo que es lógico ya que desde lejos las dos cargas se ven como una partícula de carga nula).

El hacer un cálculo más formal requiere de algunos conocimientos de geometría y recordar ciertas aproximaciones que usaron en Interferencia (experiencia de Young, la doble rendija).



En el esquema, si el punto donde se calculará el campo eléctrico o la diferencia de potencial respecto de otro punto está muy alejado de ambas cargas, la distancia  $r_1 - r_2$  se puede aproximar a la distancia entre la carga  $q$  y el punto P.

Es decir,  $\cos \varphi = \frac{r_1 - r_2}{\delta}$ . La diferencia de potencial respecto del infinito<sup>3</sup>, se puede escribir como

$$\Delta V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta \cos \varphi}{r^2}$$

Como

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{2\delta \cos \varphi}{r^3} \vec{e}_r + \frac{\delta \sin \varphi}{r^3} \vec{e}_\varphi \right] = \\ &= \frac{q\delta}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left[ 2 \cos \varphi \vec{e}_r + \sin \varphi \vec{e}_\varphi \right] \end{aligned}$$

Es decir, el campo eléctrico lejos del dipolo varía como  $1/r^3$  y depende del producto  $q\delta$ . A este producto se lo denomina **momento dipolar eléctrico**. Se lo define como un vector en la dirección de la recta que une a las cargas y cuyo sentido está determinado desde la carga negativa hacia la positiva (sentido contrario a un campo eléctrico). Así, en nuestro caso

$$\vec{p} = q\delta (-\vec{e}_z)$$

Más adelante, definiremos el equivalente para campos magnéticos.

**Fin tema especial 5.**

<sup>3</sup>Ver Capítulo 1